令和２年 10 月６日

愛知県立大学令和２年度一般入試（前期日程）情報科学部の試験科目「数学」
における出題・採点ミスについて

令和２年２月 25 日（火）に実施しました令和２年度一般入試（前期日程）における情報科学部の試験科目「数学」について、下記のとおり出題・採点ミスがあることが判明いたしました。

受験者及び関係者各位にご迷惑をお掛けいたしましたことを深くお詫び申し上げます。

本件については、下記のとおり対応することとし、再度採点を行いましたが、合否に影響はありませんでした。

本件については厳粛に受け止め、試験問題作成時及び採点時のチェック体制を強化し、再発防止に努めてまいります。

記

１　出題・採点ミスの内容及び対応

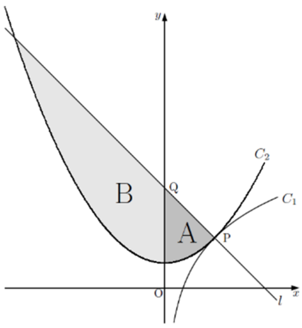
【第１問：設問（３）】

第１問：設問（３）については、条件付き確率を求めさせる設問として意図していなかったことから、条件付き確率を求める設問であると考えて導いた解答は、不正解として採点しておりました。しかし、試験問題文中の「点Ａと点Ｂが異なるとき」との文言では、条件付き確率と考えて解答することも可能であることが明らかになりました。

そのため、別添解答例のとおり「問題文を異なる２点である事の条件付き確率であると解釈した場合の解答」（１頁：赤線囲み部分）についても加点することといたしました。

【第３問：設問（２）、（３）】

第３問：設問（２）及び設問（３）において、下図のＡの領域のみを解の対象とすることを意図しておりましたが、試験問題文に条件の一部（曲線 C2 の存在範囲）を明示していなかったため、これに加えＢの領域、及びＡとＢを合わせた領域も対象となっておりました。



いずれの領域に関しても最小値は存在しますが、後者の２つの場合に対応する解に関しては、最小値を求める部分で、高等学校の学習指導要領の範囲では解答できないものとなっておりました。そこで、全ての解パターンについて、高等学校の学習指導要領の範囲で解答可能な部分までを満点と定め、再度採点を行いました。なお、別添のとおり Web 掲載中の試験問題文を訂正いたします（５頁：赤色網掛け部分）。

2　その他

希望者に対しては、次のとおり再度採点した成績を開示します。

＜窓口閲覧による開示＞

■受付期間：令和２年 10 月６日（火）～令和３年３月 31 日（水）（土日祝を除く）

■受付時間：9：00～17：00（11：15～12：15 を除く）

■受付場所：愛知県立大学 長久手キャンパス 県大総務課

（〒480-1198　愛知県長久手市茨ケ廻間 1522 番 3）

■必要書類：本学受験票、大学入試センター試験受験票、身分証明書

■そ の 他：入学者の方は上記受付期間中に UNIPA からも閲覧いただけます。

＜郵送による開示＞

手続方法については、県大総務課（電話 0561-76-8811）までお問い合わせください。

◆お問い合わせ先◆
愛知県立大学　入試課
電　話　0561-76-8813（ダイヤルイン）
メール　nyusi@bur.aichi-pu.ac.jp

情・前

令和 2 年度入学者選抜

一般入試　試験問題

情報科学部

試験科目　数　学

試験開始	9:30
試験終了	11:30

【受験上の注意】

1　用紙は，すべて試験開始の合図があるまで開かないこと。

2　試験開始後，ただちに次のことについて，よく確かめること。

ア．乱丁・落丁のある場合は，速やかに手を挙げ，監督者に知らせること。

イ．問題用紙は，全部で 8 ページである。

ウ．解答用紙は，全部で 4 枚である。

3　解答用紙の氏名欄・受験番号欄は必ず記入すること。

4　解答は，所定の欄内にはっきりと記入し，欄外には記入しないこと。

5　問題用紙の余白は，メモ又は下書きに利用してよい。

6　解答用紙は，すべて回収する。

7　問題用紙は，持ち帰ること。

第 1 問

2 個のさいころを同時に投げて，出た目の和が n であるとき，以下の問いに答えよ。

(1) $n(n-1)$ が 3 の倍数である確率を求めよ。

(2) 不等式 $|n^2-2n-15|>n+3$ が成り立つ確率を求めよ。

(3) 座標平面上の点 $\mathrm{A}\left(\cos\dfrac{n\pi}{6}, \sin\dfrac{n\pi}{6}\right)$，点 $\mathrm{B}\left(\cos\dfrac{n^2\pi}{2}, \sin\dfrac{n^2\pi}{2}\right)$ について，点 A と点 B が異なるとき，この 2 点を結ぶ直線が原点 $(0,0)$ を通る確率を求めよ。

(下書用紙)

第２問

次の連立不等式の表す領域を D とする。

$$\begin{cases} |x-y|+|x+y| \leqq x+1 \\ x^2+2x+y^2 \leqq 0 \end{cases}$$

点 (x, y) が領域 D を動くとき，以下の問いに答えよ。

(1) y の最小値を求めよ。

(2) $y-x$ の最小値を求めよ。

(3) $x^2+y^2-2x+4y+5$ の最大値を求めよ。

(下書用紙)

＜試験問題の訂正について＞
赤色網掛け部分は、設問における条件に不足があることが判明しましたので、令和２年10月６日に追記したものです。

第３問

a，b を正の定数とし，xy 平面上の２つの曲線 $C_1\ :\ y = \log(ax) + 1\ (x > 0)$ と，$C_2\ :\ y = bx^2 + \dfrac{1}{2}\ (x \geqq 0)$ が，点 $\mathrm{P}(p, q)$ において接しているとする。点 P と点 $\mathrm{Q}\left(0, 1 + \dfrac{1}{p}\right)$ を通る直線を l とし，C_2, l および y 軸で囲まれた部分を x 軸まわりに１回転させてできる立体の体積を V とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) p，b をそれぞれ a を用いて表せ。また，q の値を求めよ。

(2) V を a を用いて表せ。

(3) V の最小値を求めよ。また，そのときの a の値を求めよ。

(下書用紙)

第４問

方程式 $z^5 = 1$ の複素数の解のうち，実部と虚部が正であるものを α とし，実部が正で虚部が負であるものを β とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) α，β をそれぞれ極形式を用いて表せ。ただし，α，β の偏角 θ_α，θ_β はそれぞれ $0 \leqq \theta_\alpha < 2\pi, 0 \leqq \theta_\beta < 2\pi$ とする。

(2) $\beta - \dfrac{1}{\alpha}$ の値を求めよ。

(3) $(\alpha+\beta)^2 + (\alpha+\beta) - 1$ の値を求めよ。

(4) $\cos 2\theta_\alpha$ の値を求めよ。

(下書用紙)

令和２年度一般入試（前期日程）
「数学」解答例

【解答例】

第１問

(1) n が 3 の倍数であるか，$n-1$ が 3 の倍数であるかのいずれかである。これは，n が 3 で割り切れるか，余りが 1 になるかのいずれかと等しい。そのような 2 以上 12 以下の数は，(3,4,6,7,9,10,12) の 7 通りある。各々の確率を足すと，

$$\frac{2+3+5+6+4+3+1}{6^2}=\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$$

となる。

(2) $n^2-2n-15=(n+3)(n-5)$ である。$n^2-2n-15\geq 0$，すなわち $n\geq 5, -3\geq n$ のとき

$$n^2-2n-15>n+3 \Leftrightarrow n^2-3n-18=(n+3)(n-6)>0 \Leftrightarrow n>6, -3>n$$

である。$n\geq 5, -3\geq n$ との共通範囲は $n>6, -3>n$ となる。また，$n^2-2n-15<0$ のとき，すなわち $-3<n<5$ のとき，

$$-n^2+2n+15>n+3 \Leftrightarrow n^2-n-12=(n+3)(n-4)<0 \Leftrightarrow -3<n<4$$

となる。$-3<n<5$ との共通範囲は $-3<n<4$ である。したがって，不等式が成り立つ条件は，$-3>n, -3<n<4, 6<n$ である。n は 2 以上 12 以下の自然数なので，$n=2,3,7,8,9,10,11,12$ のとき，不等式が成り立つ。各々の確率を足すと

$$\frac{1+2+6+5+4+3+2+1}{6^2}=\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$$

となる。

(3) $A=(\cos\frac{n\pi}{6},\sin\frac{n\pi}{6})$，$B=(\cos\frac{n^2\pi}{2},\sin\frac{n^2\pi}{2})$ とおく。A, B は半径 1 の円周上の点であることに注意する。n が奇数のとき，$n=2k+1$ とおくと，$n^2=4k^2+4k+1$ となるので，n^2 を 4 で割った余りは 1 である。したがって，n が奇数のとき $B=(0,1)$ となる。このとき，直線 AB が原点を通るので，$A=(0,-1)$ でなくてはならない。$A=(0,-1)$ となるのは，$n=9$ のときだけである。

n が偶数のとき，n^2 は 4 で割り切れる。このとき，$B=(1,0)$ である。偶数 n について，$A=(-1,0)$ となるのは，$n=6$ のときだけである。

求める確率は，これらの確率を足し合わせれば良いので

$$\frac{4+5}{6^2}=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$$

である。

【問題文を異なる２点である事の条件付き確率であると解釈した場合の解答】

直線 AB が原点を通る場合の数は，$n=6,9$ のときで，上述のように $4+5=9$ 通りである。2 点 A, B が同じになる場合を数える。

n が奇数のとき $B=(0,1)$ であるから，$B=A$ を満たす n は，$n=3$ のみである。

n が偶数のとき $B=(1,0)$ であるから，$B=A$ を満たす n は，$n=12$ のみである。

よって，求める確率は，

$$\frac{4+5}{6^2-2-1}=\frac{9}{33}=\frac{3}{11}.$$

となる。

※赤線で囲んだ部分は、令和２年10月６日に追記したものです。

第２問

(1) $|x-y|+|x+y| \leqq x+1$ について，$x-y$ と $x+y$ の正負によって，

- $x-y \geq 0, x+y \geq 0$ のとき，$x-y+x+y \leqq x+1 \Leftrightarrow x \leqq 1$
- $x-y \geq 0, x+y < 0$ のとき，$x-y-x-y \leqq x+1 \Leftrightarrow y \geqq -\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$
- $x-y < 0, x+y > 0$ のとき，$-x+y+x+y \leqq x+1 \Leftrightarrow y \leqq \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$
- $x-y < 0, x+y < 0$ のとき，$-x+y-x-y \leqq x+1 \Leftrightarrow x \geqq -\frac{1}{3}$

となる。これら不等式が表す領域は図 1 の斜線部となる (境界を含む)。

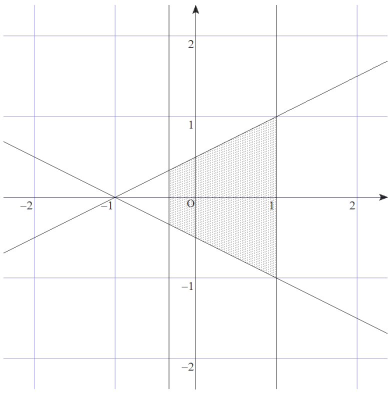


図 1:

$x^2+2x+y^2 \leqq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2+y^2 \leqq 1$ より，これは中心 $(-1,0)$，半径 1 の円で囲まれた領域なので，図 1 との共通部分は図 2 の斜線部となる (境界を含む)。

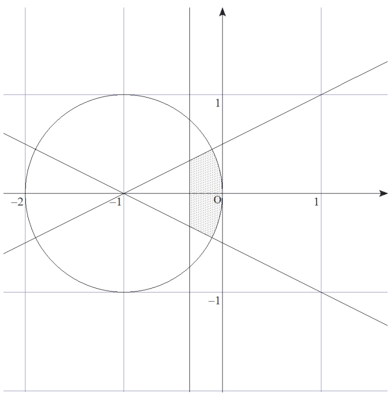


図 2:

図 2 より，領域 D の点 (x,y) のうち，y が最小となるのは直線 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ と円 $(x+1)^2+y^2=1$ の共有点のうち，第 3 象限にある点となる。その点は $(x+1)^2+(-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2})^2=1 \Leftrightarrow (x+1)^2=\frac{4}{5} \Leftrightarrow x=-1\pm\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{-5\pm2\sqrt{5}}{5}$ より，$(x,y)=(\frac{-5+2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5})$ である。したがって $y=-\frac{\sqrt{5}}{5}$ が最小値である。

(2) $y-x=k$ とおく。領域 D の点 (x,y) のうち，$y-x$ を最小にする点は，直線 $y=x+k$ の切片を最小にする点である。

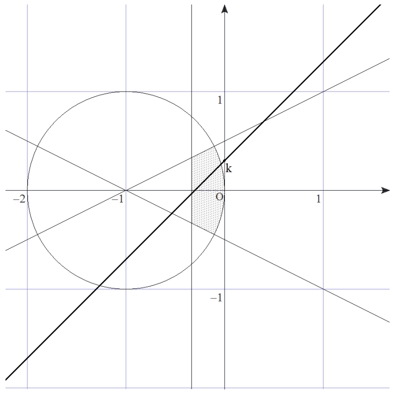


図 3:

図 3 より，$y = x + k$ の傾きは 1 なので，切片を最小にする点は y が最小となる点 $(x, y) = (\frac{-5+2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5})$ であることがわかる。よって，

$$k = y - x = \frac{5 - 3\sqrt{5}}{5}$$

が最小値である。

(3) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = k$ とする。$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = (x-1)^2 + (y+2)^2$ より，

$$C : x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = k$$

は中心 $(1, -2)$，半径 $\sqrt{k}$ の円である。k の最大値は円 C の中心 $(1, -2)$ から最も離れた領域 D の点 X と中心 $(1, -2)$ の距離の 2 乗であることに注意しておく。

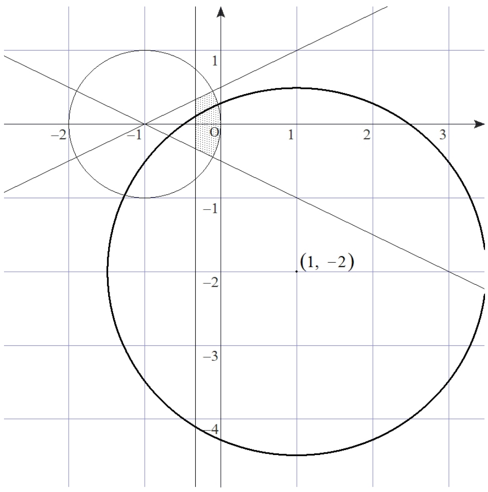
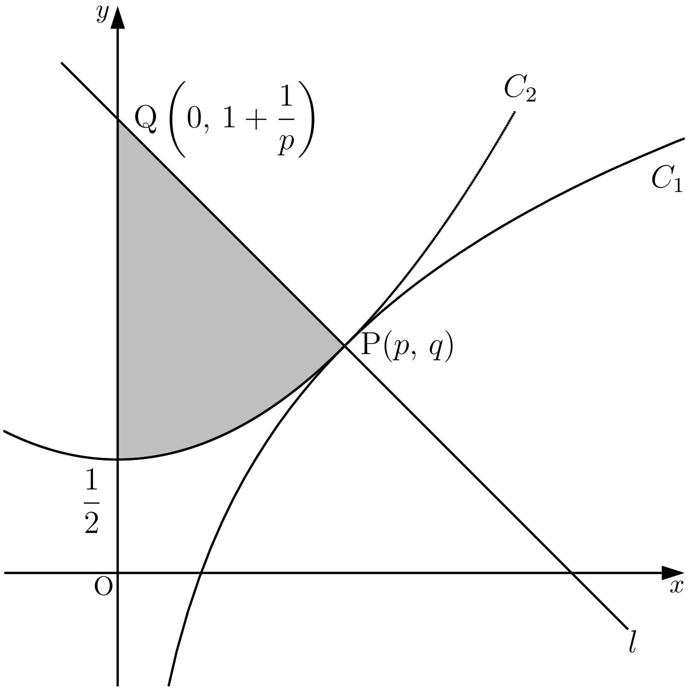


図 4:

点 X の候補は図 4 より，直線 $x = -\frac{1}{3}$ と直線 $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ の交点 $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ および直線 $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ と円 $(x+1)^2 + y^2 = 1$ の第 2 象限における交点 $(\frac{-5+2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5})$ である。

$(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ と中心 $(1, -2)$ との距離の 2 乗は $\frac{65}{9} = 7.22...$ であり，$(\frac{-5+2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5})$ と中心 $(1, -2)$ との距離の 2 乗は $9 - \frac{4\sqrt{5}}{5} = 7.21...$ である。したがって，$(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ のとき最大で，$k = \frac{65}{9}$ となる。

第３問



(1) $f(x)=\log(ax)+1$，$g(x)=bx^2+\dfrac{1}{2}$ とおく。このとき，条件より

$$f(p)=g(p),\quad f'(p)=g'(p)$$

である。$f(p)=g(p)$ より，

$$\log(ap)+1=bp^2+\frac{1}{2}\implies\log(ap)=bp^2-\frac{1}{2}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ①$$

となる。また，$f'(x)=\dfrac{1}{x}$，$g'(x)=2bx$ より

$$\frac{1}{p}=2bp\implies bp^2=\frac{1}{2}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ②$$

である。②を①へ代入すると，

$$\log(ap)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0=\log 1\implies ap=1\implies p=\frac{1}{a}$$

となる。よって，

$$b=\frac{1}{2p^2}=\frac{a^2}{2},\quad q=\log(ap)+1=1$$

である。

(2) l を a を用いて表すと，

$$y=-\frac{1}{p^2}x+1+\frac{1}{p}=-a^2x+a+1\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ③$$

である。l，y 軸，x 軸，$x=p=\dfrac{1}{a}$ で囲まれた部分を x 軸まわりに１回転させてできる立体の体積を $V_1(a)$ とすると，

$$\begin{aligned}V_1(a)&=\pi\int_0^{\frac{1}{a}}\left(-a^2x+a+1\right)^2dx=\pi\int_0^{\frac{1}{a}}\left\{a^4x^2-2a^2(a+1)x+(a+1)^2\right\}dx\\&=\pi\left[\frac{a^4}{3}x^3-a^2(a+1)x^2+(a+1)^2x\right]_0^{\frac{1}{a}}=\frac{\pi}{3a}\left(a^2+3a+3\right)\end{aligned}$$

となる。また C_2，y 軸，x 軸，$x=p=\dfrac{1}{a}$ で囲まれた部分を x 軸まわりに 1 回転させてできる立体の体積を $V_2(a)$ とすると，

$$
\begin{aligned}
V_2(a) &= \pi\int_0^{\frac{1}{a}}\left(\frac{a^2}{2}x^2+\frac{1}{2}\right)^2dx = \pi\int_0^{\frac{1}{a}}\left(\frac{a^4}{4}x^4+\frac{a^2}{2}x^2+\frac{1}{4}\right)dx \\
&= \pi\left[\frac{a^4}{20}x^5+\frac{a^2}{6}x^3+\frac{x}{4}\right]_0^{\frac{1}{a}} = \frac{7\pi}{15a}
\end{aligned}
$$

である。したがって，求める体積 V は

$$
V = V_1(a)-V_2(a) = \frac{\pi\left(5a^2+15a+8\right)}{15a}
$$

となる。

(3) (2) の結果は

$$
V = \frac{\pi\left(5a^2+15a+8\right)}{15a} = \left(\frac{a}{3}+\frac{8}{15a}+1\right)\pi = \frac{1}{3}\left(a+\frac{8}{5a}\right)\pi+\pi
$$

と変形できる。上式右辺第 1 項の π の係数部分は, 相加平均≧相乗平均より

$$
\frac{1}{3}\left(a+\frac{8}{5a}\right) \geqq \frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{a\cdot\frac{8}{5a}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}
$$

であるため，V の最小値は，$\pi\left(\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{2}{5}}+1\right) = \dfrac{\pi(15+4\sqrt{10})}{15}$ となる。

また，等号の成立条件から

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{8}{5a} \\
a^2 &= \frac{8}{5} \\
a &= \pm\sqrt{\frac{8}{5}} = \pm\frac{2}{5}\sqrt{10}
\end{aligned}
$$

であるが，$a>0$ であったから最小を達成する a は

$$
a = \frac{2}{5}\sqrt{10}
$$

となる。

第４問

(1) z の極形式を $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とすると，ド・モアブルの定理より，

$$z^5 = r^5(\cos 5\theta + i\sin 5\theta)$$

また，$1 = \cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi)$ (k は整数) であるから，

$$r^5(\cos 5\theta + i\sin 5\theta) = \cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi)$$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r^5 = 1, \quad 5\theta = 2k\pi$$

$r > 0$ であるから

$$r = 1$$

また

$$\theta = \frac{2k\pi}{5}$$

方程式 $z^5 = 1$ の解で互いに異なるものは，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で考えたものに等しい．したがって，

$$\cos\frac{2\pi k}{5} + i\sin\frac{2\pi k}{5}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

の 5 つである。この中で実部と虚部が正であるものが α であるから，

$$\underline{\alpha = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}}$$

さらに実部が正で虚部が負であるものが β であるから，

$$\underline{\beta = \cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5}}$$

(2) (1) の計算過程から直ちに β の極形式をその偏角 β が $0 \leqq \theta_\beta < 2\pi$ の範囲で表すと

$$\beta = \cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5}$$

したがって，ド・モアブルの定理より，

$$\beta = \cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5} = (\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5})^{-1} = \frac{1}{\alpha}$$

したがって，

$$\underline{\beta - \frac{1}{\alpha} = 0}$$

(3) (2) より $\beta = 1/\alpha$ であることと，ド・モアブルの定理を適用すると，

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)^2 + (\alpha+\beta) - 1 &= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + \alpha + \beta - 1 \\ &= \alpha^2 + 2 + \frac{1}{\alpha^2} + \alpha + \frac{1}{\alpha} - 1 \\ &= \frac{1}{\alpha^2}(\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1)\end{aligned}$$

ここで α は方程式 $z^5 - 1 = 0$ の解のうち 1 でないものであることと，$z^5 - 1 = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$ と因数分解できることに注意すると，

$$\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$$

したがって，

$$\underline{(\alpha+\beta)^2 + (\alpha+\beta) - 1 = 0}$$

(4) $\cos\theta_\alpha = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ であることと，α は第一象限にあることに注意すると，(3) より，

$$\cos\theta_\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

したがって，

$$\underline{\cos 2\theta_\alpha = 2(\cos\theta_\alpha)^2 - 1 = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}}$$